λ—阶导数与波动方程的Cauchy問題$(0<\lambda<1)$

蕭应鵾 陈宝耀 馬汝念

（数学力学系）

摘 要

本文利用λ——阶导数$\left(\frac{1}{2}<\lambda<1\right)$的嵌入定理改进C.Л.索伯列夫关于n維空間波动方程Cauchy問題解的存在性定理为：如果初始数据$u_0\in W_2^{([\frac{n}{2}]+2)}H^{\lambda}(G)$，$u_1\in W_2^{([\frac{n}{2}]+1)}H^{\lambda}(G)$，$\left(\frac{1}{2}<\lambda<1\right)$，則存在唯一古典解。

考慮n維空間波动方程的Cauchy問題：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\triangle u=0 \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{l} u|_{t=0}=u_0 \\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=u_1. \end{array}\right\} \tag{2}$$

С.Л. Соболев 利用嵌入定理証明了下面的結果：如果$u_0\in W_2^{(l)}(G)$，又$u_1\in W_2^{(l-1)}(G)$，（其中G是n維空間任一有界域，$l=\left[\frac{n}{2}\right]+3$•）則方程（1）有滿足条件（2）的两次連續可微的解。幷且指出：如果对于u_0及u_1假設的广义导数的阶数低于上述的阶数，那么解可能沒有二阶的連續导数。因此，在整数阶广义导数意义下，上述定理是最好的結果[1]。

在1951年，С.М. Никольский 引入了具有分数阶广义导数的定义[2]。

設函数f定义在n維空間的区域G上且$f\in L_p$，若f滿足不等式

本文于1965年5月21日收到。

$$\underset{|k|>0}{Sup}\ \frac{\|f(x+k)-f(x)\|_{L_p}}{|k|^{\lambda}}<+\infty\ , \qquad (3)$$

则称 f 属于 $W_p^{(0)}H^{\lambda}(G)$。(此处 $0<\lambda<1$)。假若函数 $f\in W_p^{(l)}$，并且 f 的任意 l 阶导数都属于 $W_p^{(0)}H^{\lambda}(G)$，则称 f 属于 $W_p^{(l)}H^{\lambda}(G)$。此处 $W_p^{(l)}$ 是 C.Л. Соболев 空間，l 是整数。

在 $W_p^{(l)}H^{\lambda}(G)$ 内引入范数

$$\|f\|_{W_p^{(l)}H^{\lambda}(G)}=\|f\|_{L_p}+\sum_{l_1+\cdots+l_n=l}H^{\lambda}\left(\frac{\partial^l f}{\partial x_1^{l_1}\cdots\partial x_n^{l_n}}\right)$$

其中 $H^{\lambda}(f)=\underset{|k|>0}{Sup}\ \dfrac{\|f(x+k)-f(x)\|_{L_p}}{|k|^{\lambda}}$，则 $W_p^{(l)}H^{\lambda}(G)$ 是綫性賦范空間，并且有下列嵌入定理[3][4]：

Ⅰ．如果 $n<p(l+\lambda-m)$，则

$$W_p^{(l)}H^{\lambda}(G)\subset C^{(m)}(G)\ ,$$

并且
$$\left|\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m_1}\cdots\partial x_n^{m_n}}\right|\leqslant K\|f\|_{W_p^{(l)}H^{\lambda}(G)}$$

Ⅱ．将 $W_p^{(l)}H^{\lambda}(G)$ 的元素变为 $C^{(m)}$ 中的元素的恒等变换算子是全連續算子。

本文利用上述結論改进 C.Л.Соболев 的結果，得到

定理　設 $u_0\in W_2^{(l)}H^{\lambda}(G)$，$u_1\in W_2^{(l-1)}H^{\lambda}(G)$，(其中 $l=\left[\frac{n}{2}\right]+2$，$\frac{1}{2}<\lambda<1$，) 则方程(1)的 Cauchy 間題存在两次連續可微的解。

証明：对于 u_0 及 u_1，作平均函数序列 $\{u_{0h}\}$ 与 $\{u_{1h}\}$。我們熟知存在方程(1)的解 u_h 滿足条件

$$u_h\Big|_{t=0}=u_{0h}\ ,\qquad \frac{\partial u_h}{\partial t}\Big|_{t=0}=u_{1h}\ ,$$

u_h 具有連續的各阶导数。

今証 $\{u_{0h}\}$ 在 $W_2^{(l)}H^{\lambda}(\Omega(0))$ 内对于 h 一致有界。为此只要証明

$$\underset{|k|>0}{Sup}\ \frac{\|D^l u_{0h}(x+k)-D^l u_{0h}(x)\|_{L_2(\Omega(0))}}{|k|^{\lambda}}$$

对于h一致有界，其中$D^l u_{oh}(x)$表示对$u_{oh}(x)$的任意l阶广义导綫，$\Omega(o)$表示超平面$t=0$内的有界域。

考察$u_o(x)$的平均函数

$$u_{oh}(x)=\int\limits_{|\bar{x}-x|\leqslant h} u_o(\bar{x})\ \frac{\omega(\bar{x}-x,h)}{\kappa h^n}\ d\bar{x},$$

由平均函数的性质推得

$$D^l u_{oh}(x)=\int\limits_{|\bar{x}-x|\leqslant h} \frac{\omega(\bar{x}-x,h)}{\kappa h^n} D^l u_o(\bar{x})d\bar{x},$$

从而

$$\frac{\|D^l u_{oh}(x+k)-D^l u_o(x)\|_{L_2}}{|k|^\lambda}=$$

$$=\frac{1}{|k|^\lambda}\left\|\int\limits_{|\bar{x}-x-k|\leqslant h}\frac{\omega(\bar{x}-x-k,h)}{\kappa h^n}D^l u_o(\bar{x})d\bar{x}-\int\limits_{|\bar{x}-x|\leqslant h}\frac{\omega(\bar{x}-x,h)}{\kappa h^n}D^l u_o(\bar{x})d\bar{x}\right\|_{L_2}$$

$$=\frac{1}{|k|^\lambda}\left\|\frac{1}{\kappa h^n}\int\limits_{|y|\leqslant h}[D^l u_o(x+y+k)-D^l u_o(x+y)]\omega(y,h)dy\right\|_{L_2}$$

$$=\frac{1}{|k|^\lambda}\left(\int\frac{1}{\kappa h^n}\ dx\left|\int\limits_{|y|\leqslant h}[D^l u_o(x+y+k)-D^l u_o(x+y)]\ \omega(y,h)dy\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\frac{1}{|k|^\lambda}\left(\int dx\left[\int\limits_{|y|\leqslant h}|D^l u_o(x+y+k)-D^l u_o(x+y)|^2dy\right]\cdot\left[\int\limits_{|y|\leqslant h}\frac{\omega^2(y,h)}{\kappa h^n}dy\right]\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{|k|^\lambda}\left(\left[\int\limits_{|y|\leqslant h}\frac{\omega^2(y,h)}{\kappa h^n}dy\right]\cdot\int dx\int\limits_{|y|\leqslant h}|D^l u_o(x+y+k)-D^l u_o(x+y)|^2dy\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\frac{1}{|k|^\lambda}\left(\int dx\int\limits_{|y|\leqslant h}|D^l u_o(x+y+k)-D^l u_o(x+y)|^2dy\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{|k|^\lambda}\left(\int\limits_{|y|\leqslant h}dy\int|D^l u_o(x+y+k)-D^l u_o(x+y)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\frac{1}{|k|^\lambda}\left(\int\limits_{|y|\leqslant h}A^2k^{2\lambda}dy\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant M,$$

其中A是滿足 Hölder 条件的 Hölder 系数。因此

$$\operatorname*{Sup}_{|k|>0} \frac{\|D^l u_{oh}(x+k)D^l u_{oh}(x)\|_{L_2}}{|k|^{\lambda}}$$

一致有界。所以

$$\|v_{oh}(x)\|_{W_2^{(l)}H^{\lambda}(\Omega(o))} \text{ 一致有界。}$$

同理

$$\|u_{1h}(x)\|_{W_2^{(l-1)}H^{\lambda}(\Omega(o))} \text{ 一致有界。}$$

由于u_h是(1)的解，因而 $D^l_{t,x}u_h(x+k,t)-D^l_{t,x}u_h(x,t)$

亦是(1)的解，所以有能量不等式

$$\sum_{l_1+\cdots+l_n=l-1} \frac{\|D_tD_x^{(l-1)}u_h(x+k,t)-D_tD_x^{(l-1)}u_h(x,t)\|_{L_2(\Omega(t))}}{|k|^{\lambda}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l_1+\cdots+l_n=l-1} \frac{\|D_tD_x^{(l-1)}u_h(x+k,t)-D_tD_x^{(l-1)}u_h(x,t)\|_{L_2(\Omega(o))}}{|k|^{\lambda}}$$

及

$$\sum_{l_1+\cdots+l_n=l} \frac{\|D_x^l u_h(x+k,t)-D_x^l u_h(x,t)\|_{L_2(\Omega(t))}}{|k|^{\lambda}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l_1+\cdots+l_x=l} \frac{\|D_x^l u_h(x+k,t)-D_x^l u_h(x,t)\|_{L_2(\Omega(o))}}{|k|^{\lambda}}。$$

由$\{v_{oh}\}$及$\{u_{1h}\}$分别在$W_2^{([\frac{n}{2}]+2)}H^{\lambda}$及$W_2^{([\frac{n}{2}]+1)}H^{\lambda}$内的一致有界性得到：序列$\{u_h\}$对于超平面$t=$常数内的任何有界域$\Omega(t)$按$W_2^{([\frac{n}{2}]+2)}H^{\lambda}$意义一致有界．当$\lambda>\frac{1}{2}$时，

$$2\left(\left[\frac{n}{2}+2+\lambda-2\right)>2\left(\left[\frac{n}{2}\right]+2+\frac{1}{2}-2\right)=$$

$$=\begin{cases} n+1 & \text{当 } n \text{ 为偶数} \\ n & \text{当 } n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

根据上述的嵌入定理知道：当t固定而将u_h看作变量$x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n$的函数时，$u_h\in C^{(2)}(\Omega(t))$而且一致有界和等度連續。由相仿的估值式可以証明$\frac{\partial u_h}{\partial t}\in C^{(1)}(\Omega(t))$而$\frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2}$与$\frac{\partial^2 u_h}{\partial x_i\partial x_j}\in C(\Omega(t))$而且一致有界和等度連續。

根据嵌入算子的全連續性，u_h 及开首二阶导数在任何 n 維流形 $t=$ 常数上分别是 $C^{(2)}$，$C^{(1)}$，C 內的列紧集，并且将这些函数看作 $C^{(2)}$，$C^{(1)}$，C 中的依赖于 t 的元素时，代表一致連續軌道。

因此从 $\{u_h\}$ 中可以选出如此的子列，它連同开首二阶导数一致收斂于 $u\in C^{(2)}$，并在平均方程

$$\frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2}-\triangle u_h=0$$

和

$$u_h\Big|_{t=0}=u_{0h}, \qquad \frac{\partial u_h}{\partial t}\Big|_{t=0}=u_{1h}$$

中取极限，便得到我們的定理。

本文是在中国科学院数学研究所丁夏畦副研究員指导下完成的，致以謝意。

参 考 文 献

〔1〕 C.Л.索伯列夫　泛函分析在数学物理中的应用（中譯本）　科学出版社

〔2〕 C.M.Никольский, Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных, Труды Матем·ин—та им· B.A.Стеклова 38 (1951), 244—278.

〔3〕 C.M.Никольлкий О Теоремах вложения, проаолжения и приближения дифференцируемых функций многих перемен-ных У.М.Н Гом XVI вып.5(101)(1961)

〔4〕 C.Л.Соболев некоторые советские работы по применеию функционального анализа к диффенциалыным уравнениям Czechoslovak Mathematical Journal 6 (1956)

Derivative of λ——th order and Cauchy's Problem for Wave Equation($0<\lambda<1$)

Siao Ing-kuen Chen Bou-yew Ma Rou-nien

Abstract

Consider the Cauchy problem for the wave equation in n—dimensional space:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \\ u\Big|_{t=0} = u_0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1 \end{cases}$$

In the paper we improve the result of S.L.Sobolev in following theorem

Theoem: If $u_0 \in W_2^{\left(\left[\frac{n}{2}\right]+2\right)} H^\lambda(G)$ and $u_1 \in W_2^{\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)} H^\lambda(G)$, then Cauchy's problem possesses a solution u with continuous second derivatives. ($\frac{1}{2}<\lambda<1$)